**※2022年度广西自然科学奖公示材料**

1. **成果名称：**可解群的新特性及相关结构　（自治区科技成果登记号：201919793、202022041）
2. **拟提名者：**广西壮族自治区教育厅
3. **成果简介**

本项目属于群与代数前沿研究领域。由伽罗瓦定理知，高次代数方程有根式解当且仅当它对应的伽罗瓦群是可解群。因此，可解群的结构描述既具有理论意义，也有应用价值。另一方面，1980年有限单群分类定理完成后，有限群研究的重点也转向了可解群。本项目主要研究可解群的结构及其表示理论。重要的科学发现点与创新点如下：

**1.提出了SS-可补子群的概念， 使得子群的若干广义正规性和可补性得到统一推广，从而给出了可解群结构的若干新描述，揭示了可解群的新特性。**

正规性、可补性是子群的两类最要的性质。通过正规子群，可以作商群。而群论大家Hall最早使用可补性来描述可解群的性质。针对子群这两类独立的性质，提出了SS-可补子群的概念，使得子群的若干广义正规性和可补性得到统一推广。同时，使用该概念给出了可解群结构的若干新描述，揭示了可解群的新特性，为可解群的研究提供新的参考。

**2.推广了**Schmidt**定理，给出可解群的若干新的判定定理，揭示了非幂零子群、非正规子群等特殊子群的数量性质与有限群的可解性之间的联系。**

著名的Schmidt定理阐述了内幂零群（即每个极大子群都是幂零群的非幂零群）的结构。首先研究了极大子群（二极大子群）是QTI-子群的有限群的结构，接着研究了非幂零极大子群是QTI-子群的有限群的结构，得到了Schmidt定理的若干推广。同时，首次使用有限群*G*的素因子个数的函数作为约束条件，研究了非幂零子群、非正规子群（非次正规子群）的共轭类个数对有限群可解性的影响，得到可解群的若干新的判定结论，揭示了非幂零子群、非正规子群等特殊子群的数量性质与有限群的可解性之间的联系。相关结果被Commun. Math. Stat., Math. Notes, J. Algebra等著名杂志正面引用。特别地，其中两篇文章被白俄罗斯戈梅利州立大学著名群论大家A. N. Skiba在其一篇综述性文章中引用，我们提出的一个问题引起德国伍兹堡大学R. Brandl教授注意被解决。

**3.较为系统地研究了单项特征标次数对可解群结构的影响，丰富了可解群的特征标理论。**

单项特征标可以由子群的线性特征标诱导，而可解群可以嵌入到M-群中(每个不可约特征标都是单项特征标的有限群). 因此，可解群具有很多单项特征标，单项特征标对可解群有很强的影响。项目组较为系统地研究了单项特征标次数对可解群结构的影响，得到了可解群结构的一系列描述，特别地给出了可解群版的Thompson定理和Ito- Michiler定理，极大丰富了可解群的特征标理论。相关结果被美国表示论专家M. L. Lewis和土耳其青年学者Burcu所关注和引用。

该项目由国家自然科学基金项目5项，广西自然科学基金项目3项支撑。项目研究历时7年多，发表学术论文50多篇，培养硕士研究生30多名。研究成果已得到了国内外同行专家的高度评价与认可, 在国际上产生了广泛影响。

**代表性论文（专著）目录（不超过8篇）**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 排序 | 类型 | 论文专著名称 | 年卷页（版号） | 发表日期 | 作者 | 署名单位 | 刊名 | 通讯作者 | 他引次数 | 检索数据库 | 广西单位是否署名 | 附件编号 |
| 1 | 论文 | Finite groups all of whose second maximal subgroups are QTI-subgroups | 2012，40:3726-3732 | 2012/09 | 卢家宽/郭秀云 | 上海大学 | Commun.Algebra | 郭秀云 | 2 | SCIE | 否 | 1 |
| 2 | 论文 | SS-supplemented subgroups of finite groups and their properties | 2012：54，481-491. | 2012/12 | 郭秀云/卢家宽 | 上海大学/广西师范大学 | Glasgow Math. J. | 郭秀云 | 3 | SCIE | 是 | 2 |
| 3 | 论文 | Finite groups with non-nilpotent maximal subgroups | 2013，171:425–431 | 2013/07 | 卢家宽/庞琳娜/钟祥贵 | 广西师范大学 | Monatsh. Math. | 卢家宽 | 6 | SCIE | 是 | 3 |
| 4 | 论文 | Lower bounds on conjugacy classes of non-nilpotent subgroups in a finite group | 2015,14,1550039 (5 pages) | 2015/10 | 孟伟/卢家宽 | 云南民族大学/广西师范大学 | J. Algebra Appl. | 孟伟 | 1 | SCIE | 是 | 4 |
| 5 | 论文 | On Solvability of Finite Groups with Few Non-Normal  Subgroups | 2015，43：1752-1756 | 2015/03 | 卢家宽/孟伟 | 广西师范大学/云南民族大学 | Commun.Algebra | 卢家宽 | 4 | SCIE | 是 | 5 |
| 6 | 论文 | On finite groups with non subnormal subgroups | 2017, 45:2043-2046, | 2017/10 | 卢家宽/孟伟 | 广西师范大学/云南民族大学 | Commun.Algebra | 卢家宽 | 3 | SCIE | 是 | 6 |
| 7 | 论文 | Finite groups and degrees of irreducible monomial characters | 2016，15：1650073 (4 p) | 2016/05 | 庞琳娜/卢家宽 | 广西师范大学 | J. Algebra Appl. | 卢家宽 | 7 | SCIE | 是 | 7 |
| 8 | 论文 | Finite groups and degrees of irreducible monomial characters II | 2017，16：1750231 (5 p) | 2017/06 | 庞琳娜/卢家宽 | 广西师范大学 | J. Algebra Appl. | 卢家宽 | 1 | SCIE | 是 | 8 |
| 合计 | | | | | | | | | 27 | / | / | / |

**五、 候选人姓名**

卢家宽、郭秀云、孟伟、庞琳娜、钟祥贵

**六、候选单位名称**

广西师范大学、上海大学、云南民族大学